

---

# Multivariate Verfahren – Strukturgleichungsmodelle (Überblick)

Seufert  
28.11.11  
FSU Jena

---

## Strukturgleichungsmodelle

1. **Ziel und generelle Modellstruktur**
  - ◆ Strukturmodell: Beziehungen zwischen latenten Variablen
  - ◆ Messmodelle: Indikatoren für endogene/exogene latente Variablen
  - ◆ Kausal-Interpretation der Korrelationen und Kovarianzen
2. **Beschreibung des Modells**
  - ◆ Pfaddiagramme und Nomenklatur der Modellparameter
  - ◆ Beschreibung als lineares Gleichungssystem
  - ◆ Beschreibung in Matrixschreibweise
3. **Schrittfolgen (konfirmatorische Analyse)**
  - ◆ Hypothesenbildung
  - ◆ Modellspezifikation – feste und restringierte Parameter
  - ◆ Modellidentifikation – nicht- und überidentifizierte Modelle
  - ◆ Verfahren zur Schätzung der Modellparameter
  - ◆ Prüfung der Schätzergebnisse („Modell-Fit“)
4. **Modifikation der Modellstruktur (explorative Analyse)**
  - ◆ Komplexitätsreduktion/Komplexitätserweiterung

## Strukturgleichungsmodelle – Ziel und Grundannahmen

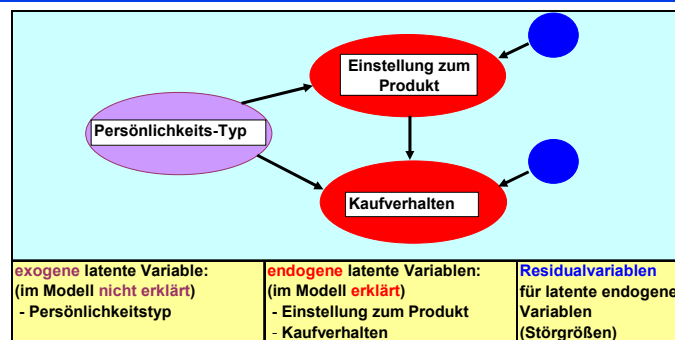
### ◆ Grundannahme:

- Hypothesen über Stärke und Richtung der **Zusammenhänge zwischen latenten Variablen** (nicht-messbare, hypothetische Konstrukte) lassen sich **indirekt über Indikatorvariablen** (mithilfe deren Korrelationen und Kovarianzen) überprüfen

### ◆ Notwendige Hypothesen:

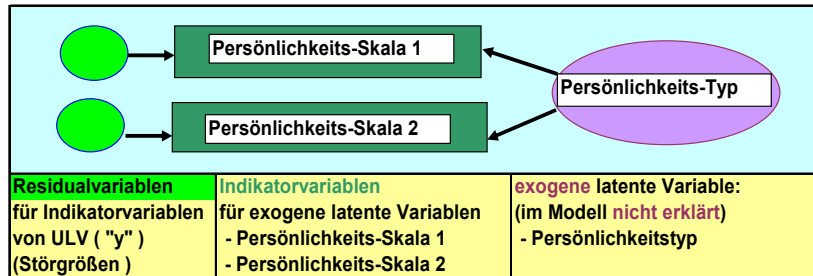
- **Theorie**: Beziehungen zwischen Konstrukten
- **Beobachtung**: Beziehungen zwischen messbaren Größen (Indikatoren)
- **Korrespondenzhypothesen**: Beziehungen zwischen Konstrukten und Indikatoren („Operationalisierbarkeit“ von Konstrukten)

## Strukturgleichungsmodelle – Strukturmodell



- ◆ **Strukturmodell:** Hypothesen über Beziehungen zwischen **exogenen** (ULV) und **endogenen** (ALV) latenten Variablen; Berücksichtigung von Störgrößen über **Residual**variablen der endogenen Variablen

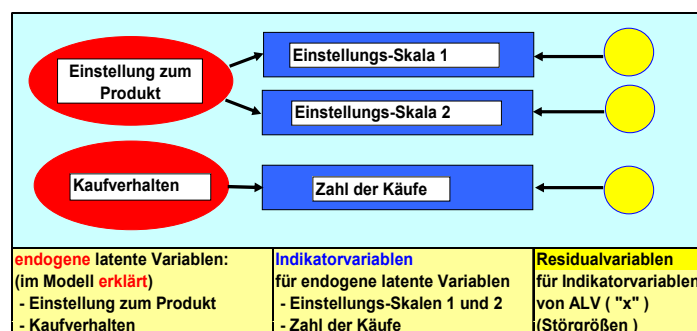
## Strukturgleichungsmodelle – Messmodell 1



### ◆ Messmodell 1:

- Hypothesen über Beziehungen zwischen **exogenen** latenten Variablen (ULV) und **Indikator- (Mess-) Variablen**;  
Berücksichtigung von Störgrößen über **Residualvariablen** der Indikatorvariablen

## Strukturgleichungsmodelle – Messmodell 2

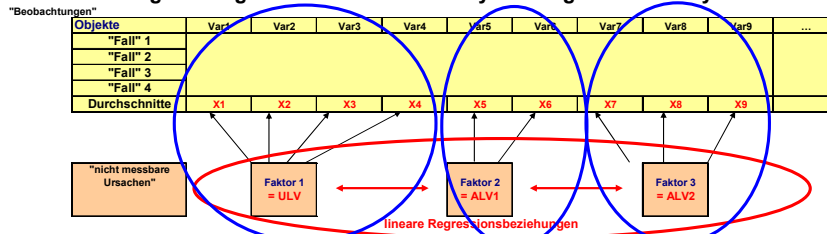


### ◆ Messmodell 2:

- Hypothesen über Beziehungen zwischen **endogenen** latenten Variablen (ALV) und **Indikator- (Mess-) Variablen**;  
Berücksichtigung von Störgrößen über Residualvariablen der Indikatorvariablen

# Strukturgleichungsmodelle – Kausalinterpretation von Korrelationen

## Strukturgleichungsmodelle: Faktorenanalyse + Regressionsanalyse



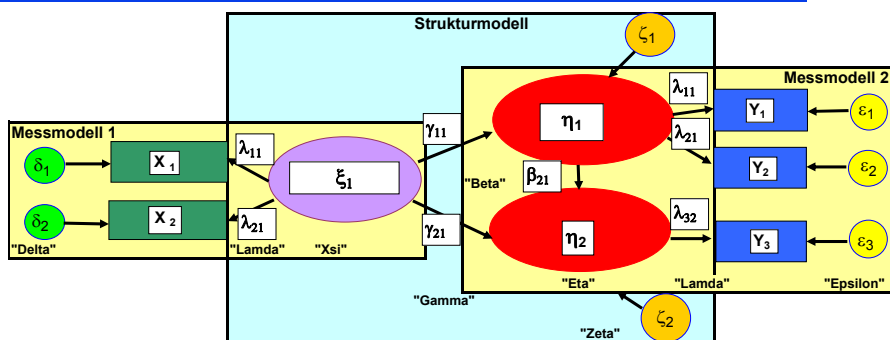
Grundannahme Faktorenanalyse: Merkmale/Eigenschaften von Objekten lassen sich auf wenige "wesentliche" Faktoren zurückführen

Zusätzliche Annahme Strukturgleichungsmodell: 1) Latente Variablen als "Faktoren" der Indikatorvariablen (Messmodelle)  
 1) Zusammenhänge zwischen latenten Variablen als Regressionsgleichung zwischen abhängigen (endogenen) und unabhängigen (exogenen) Variablen beschreibbar (Strukturmodell)

### Annahmen in Strukturgleichungsmodellen:

- Latente Variablen (Konstrukte) lassen sich als „Faktoren“ von Indikatorvariablen interpretieren
- Einflussstärken zwischen den latenten Variablen sind additiv verknüpft: entspricht linearer Regressionsbeziehung

# Strukturgleichungsmodelle – Modellstruktur als Pfaddiagramm



### Vollständiges Strukturgleichungsmodell

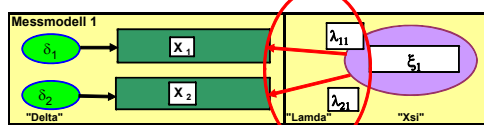
- Strukturmodell plus
- Messmodelle der latent exogenen (Messmodell 1) und der latent endogenen Variablen (Messmodell 2)

### Nomenklatur:

- griechische Buchstaben für latente Variablen, Residualvariablen und Pfadkoeffizienten ( $\lambda$  = Stärke des Zusammenhangs); lateinische Buchstaben für Indikatorvariablen (x, y)

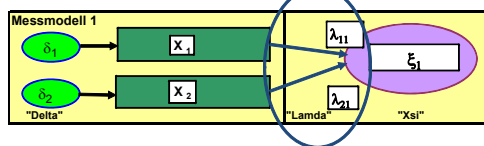
# Strukturgleichungsmodelle – reflektive und formative Indikatoren

Übliche Interpretation der Beziehung zwischen latenter exogener Variablen und Indikatorvariablen: "reflektiv"



[ d.h. Korrelation zwischen Indikatorvariablen  $x_1$  und  $x_2$  allein von  $\xi_1$  abhängig ]

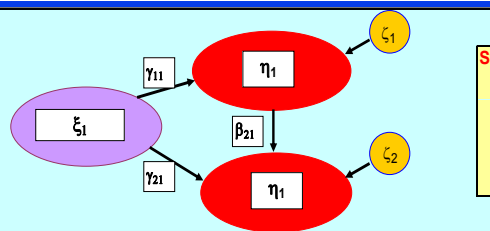
Alternative Interpretation der Beziehung zwischen latenter exogener Variablen und Indikatorvariablen: "formativ"



[ d.h.  $\xi_1$  ist von Indikatorvariablen  $x_1$  und  $x_2$  linear abhängig ]

Formative Interpretation wird nicht von jeder Software unterstützt!!

# Strukturgleichungsmodelle – als lineares Gleichungssystem



Strukturmodell

$$\eta_1 = \gamma_{11} \cdot \xi_1 + \zeta_1$$

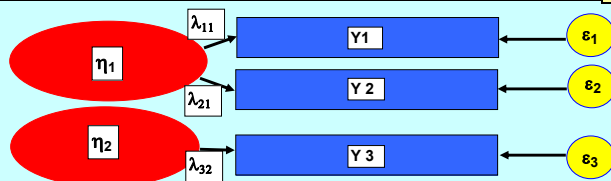
$$\eta_2 = \beta_{21} \cdot \eta_1 + \gamma_{21} \cdot \xi_1 + \zeta_2$$



Messmodell der exogenen Variable

$$x_1 = \lambda_{11} \cdot \xi_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \lambda_{21} \cdot \xi_1 + \delta_2$$



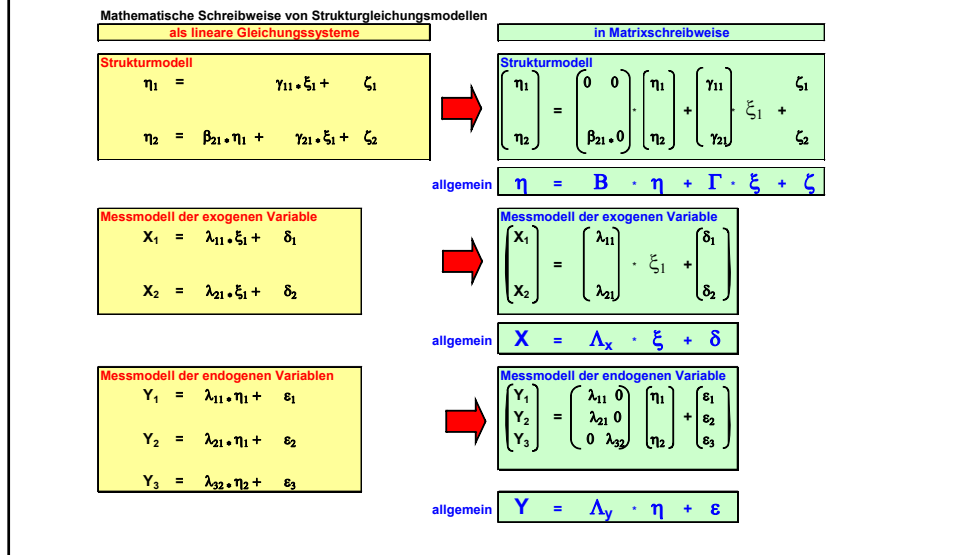
Messmodell der endogenen Variablen

$$y_1 = \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \epsilon_1$$

$$y_2 = \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \epsilon_2$$

$$y_3 = \lambda_{32} \cdot \eta_2 + \epsilon_3$$

# Strukturgleichungsmodelle – in Matrixschreibweise



# Strukturgleichungsmodelle – Schrittfolgen

## Konfirmatorisch:

1. Hypothesenbildung
2. Pfaddiagramm/Modellspezifikation
3. Modellidentifikation
4. Schätzung der Modellparameter
5. Beurteilung der Schätzergebnisse

## Explorativ:

1. Modifikation der Modellstruktur

## Strukturgleichungsmodelle – Modellspezifikation

- ◆ **Annahme, dass Modell vollständig ist**
  - alle wesentlichen Variablen sind enthalten, so dass **keine** sonstigen „Drittvariablen“ Einfluss nehmen)
  - Schätzgrundlage:  $\zeta, \varepsilon, \delta, \eta, \xi$  (Messfehlervariablen und Konstrukte) **korrelieren nicht** miteinander
- ◆ **Vorgaben zu Parameterwerten**
  - **Feste Parameter**: Wert **gleich Null**, wenn keine Beziehung zwischen Variablen, fester Wert **größer Null**, wenn Einflussstärke bekannt
  - **Restringierte Parameter**: Einflussstärke einer Gruppe von Variablen ist gleich ( $\rightarrow$  nur ein Parameter muss geschätzt werden)
  - **Freie Parameter**: Parameter, die geschätzt werden

## Strukturgleichungsmodelle – Modellidentifikation

Frage: Ist Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Bedingung 1:  
Zahl der Gleichungen mindestens so groß wie Zahl der zu schätzenden (freien) Parameter

$n$  Indikatorvariablen Parameterschätzung =  
↓ Einflussstärken zwischen Variablen schätzen  
 $\frac{n(n+1)}{2}$  Gleichungen =  $s$   $\geq$   $t$   $(\beta, \lambda, \gamma, \varepsilon, \delta) = \text{Parameter}$   
Zahl der Freiheitsgrade (d.f.)

Zahl der y-Variablen:  $p$   
 Zahl der x-Variablen:  $q$   
↓  
 $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$

$d.f. = s - t$

$d.f. < 0$  nicht lösbar ("nicht identifiziert")  
[freie Parameter in feste umwandelbar?]  
 $d.f. = 0$  eindeutig lösbar (aber: keine Zusatzinformationen mehr zum Testen der Modellstruktur)  
 $d.f. > 0$  lösbar ("überidentifiziert")

Bedingung 2:  
Zahl der Indikatorvariablen kleiner als Zahl der Objekte (Fälle)

# Strukturgleichungsmodelle – Parameterschätzung

Iterative Schätzung mit dem Ziel: minimale Differenz zwischen  
**modelltheoretischer** Varianz-Kovarianz-Matrix ( $\Sigma$ ) und  
**empirischer** Varianz-Kovarianz-Matrix (S) der Stichprobe

Diskrepanzfunktion:  $C = (n-1) F$

Anforderungen der verschiedenen Verfahren zur Berechnung von F

Kriterium	ML	GLS	ULS	SLS	ADF
Multinormalverteilung der manifesten Variablen	ja	ja	nein	nein	nein
Skaleninvarianz der Fit-Funktion (Minimum unabhängig von Dim)	ja	ja	nein	ja	ja
Stichprobengröße	> 100	> 100	> 100	> 100	$1,5p(p+1)$
Verfügbarkeit von Inferenzstatistiken ( $\chi^2$ )	ja	ja	nein	nein	ja

p = Zahl der manifesten Variablen ("beobachtbar")

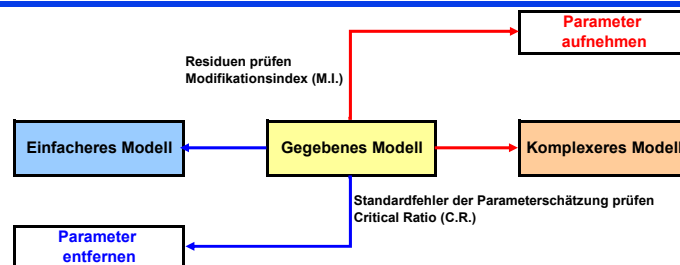
ML präzisestes Verfahren, wenn Multinormalverteilungsbedingung erfüllt

ML = Maximum-Likelihood  
 ULS = Unweighted least-square  
 GLS = generalized least-square  
 SLS = scale free least-square  
 ADF = asymptotically distribution-free

# Strukturgleichungsmodelle – Prüfkriterien (Modell-Fit)

- ◆ **Zuverlässigkeit der Parameterschätzungen**
  - Standardfehler der Schätzung
  - Reliabilität (1- Fehlervarianz/Gesamtvarianz)
- ◆ **Beurteilung der Gesamtstruktur des Modells**
  - Chi-Quadrat-Wert / Zahl der Freiheitsgrade (d.f.):  $\leq 2,5$
  - Goodness-of-Fit-Index (GFI):  $\geq 0,9$
  - Adjusted-Goodness-of-Fit (AGFI):  $\geq 0,9$
  - Normed-Fit-Index (NFI):  $\geq 0,9$
  - Comparative-Fit-Index (CFI):  $\geq 0,9$
  - Root-Mean-Square-Error of Approximation (RMSEA):  $\leq 0,05$
- ◆ **Beurteilung der Teilstrukturen des Modells**
  - Residuen:  $\leq 0,1$
  - Standardisierte Residuen:  $\leq 0,1$
  - Critical Ratio (C.R.):  $> 1,96$

## Strukturgleichungsmodelle – Modellmodifikation



- ◆ Parameter „ohne Erklärungsmächtigkeit“ entfernen
  - Große Standardfehler der Schätzung: **Parameter entfernen**
  - C.R.-Werte (Basis Standardfehler)  $\leq 1,96$ : **Parameter fixieren**
- ◆ **Zusätzliche Parameter mit Erklärungskraft finden**
  - Residuen (Differenz modelltheoretische und empirische Korrelationsmatrix) mit hohen Werten: **zusätzliche Pfade anlegen**
  - M.I.-Index (Veränderung des  $\chi^2$ -Wertes von festen Parametern): **Parameter freisetzen**

## Strukturgleichungsmodelle - Analyse-Software

- ◆ AMOS 4.0 (Backhaus-Beispiel) – Teil des SPSS-Paketes
  - Grafik-Tool für Darstellung der Modellstruktur → automatische Berechnung des Gleichungssystems
- Oder:
- ◆ LISREL 8.7
- ◆ ...usw.